Chapitre 22

Polynômes (partie A)

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On peut définir un polynôme en fonction d'un réel x, mais ce même polynôme peut aussi s'appliquer à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, ou encore à un endomorphisme de groupes $f : G \to G$. Ainsi, c'est bien le même polynôme qu'on applique à ces trois objets :

$$P(x) = x^3 + 2x - 4$$
$$P(A) = A^3 + 2A - 4I_n$$
$$P(f) = f^3 + 2f - 4\mathrm{id}_E \qquad \text{avec } f^3 = f \circ f \circ f$$

On souhaite étudier le polynôme P indépendamment des objets en lequel on l'applique. Cela conduit à définir un polynôme selon une variable X qui sera appelée une <u>indéterminée</u> : on ne précisera pas l'ensemble auquel X appartient (en pratique X sera un élément d'une “algèbre”). Le polynôme ci-dessus s'écrira donc :

$$P(X) = X^3 + 2X - 4$$

Plus généralement, un tel polynôme peut s'appliquer à tout élément a d'un anneau $(A, +, \times)$:

$$P(a) = a^3 + 2a - 4\,1_A$$

1 Opérations sur les polynômes

1.1 Définition

Définition 22.1 – Définition intuitive d'un polynôme

À tout entier $n \in \mathbb{N}$ et à tout $(n+1)$-uplet $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, on associe un objet P appelé polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On le notera :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad = \quad a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

$a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont appelés les coefficients de P. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, a_k est appelé coefficient d'ordre k de P.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

L'écriture $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est appelée l'écriture développée de P. On dispose de la règle de calcul suivante : si $a_k = 0$, alors $a_k X^k = 0X^k = 0$. On peut alors omettre d'écrire ce terme dans l'écriture de P.

Exemple 1.
- $P = -X^3 + 2X$ est un polynôme : ces coefficients sont $(a_3, a_2, a_1, a_0) = (-1, 0, 2, 0)$
- Tout réel est un polynôme : le polynôme 4 correspond au polynôme de coefficient $a_0 = 4$.
- Le polynôme 0 est appelé le polynôme nul.
- $X^{1/2}$ et $1 + X + X^2 + X^3 + \ldots\ldots$ ne sont pas des polynômes.

À ce stade, l'écriture développée $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ n'est qu'une notation. Bien qu'elle fasse apparaitre des sommes, des produits et des puissances, on ne donnera un sens à toutes ces opérations que plus loin.

Remarque. À cause de la règle $0X^k = 0$, on peut toujours rajouter des coefficients nuls supplémentaires à un polynôme sans le modifier. Par exemple, le polynôme $P = X + 3$ peut correspondre aux coefficients $(a_1, a_0) = (1, 3)$, mais on peut aussi l'écrire $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k$ avec $(a_3, a_2, a_1, a_0) = (0, 0, 1, 3)$.

De ce fait, un même polynôme P admet plusieurs écritures développées. C'est pourquoi on dispose d'une autre façon de définir un polynôme, plus précise mais plus abstraite :

Définition 22.2 – Définition formelle d'un polynôme

À toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *nulle à partir d'un certain rang*, on associe un objet P appelé polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, noté :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \quad = \quad a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots$$

Comme la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n+1$, on a $a_k = 0$. Cela entraine que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on retrouve la Définition 22.1 : bien que la somme soit infinie, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls.

1.2 Degré d'un polynôme

Définition 22.3 – Degré

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On définit son degré, noté $\deg P$ ou $\deg(P)$, comme étant la valeur suivante :

- Si $P \neq 0$, $\deg P$ est le plus grand entier $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$.
- Si $P = 0$, on pose par convention $\deg(0) = -\infty$.

Exemple 2. Le degré de $P = a_1 X + a_0$ est ......

P est dit constant si $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$, càd si $\deg P$.......... . En particulier, P est constant *non nul* ssi $\deg P$............

Notation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\boxed{\text{au plus}}$ n :

$$\mathbb{K}_n[X] := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$$

En particulier $\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants. En pratique, on identifie $\mathbb{K}_0[X]$ à $\mathbb{K}$. Ainsi, un élément $a \in \mathbb{K}$ peut être considéré comme le polynôme constant égal à a.

Théorème 22.4 – Identification

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. $P = Q$ si et seulement si $\deg P = \deg Q$ et leurs coefficients de même degré sont égaux deux à deux.

1.3 Écriture normalisée et vocabulaire lié au degré

La dénomination d'écriture normalisée n'est pas officielle. Mais c'est bien pratique pour fixer les idées.

Théorème 22.5 – Non officiel : écriture "normalisée"

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ **non nul** et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\deg P = n$ si et seulement s'il existe $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \boxed{\text{avec } a_n \neq 0}$$

Il s'agit de l'écriture normalisée de P. Le $(n+1)$-uplet $(a_0, \cdots, a_n)$ est alors *unique*.

L'écriture normalisée a comme avantage d'être unique et de donner directement le degré. Le polynôme nul n'admet pas d'écriture normalisée.

Exemple 3. Soit $P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ avec $a_2 \neq 0$. Alors $\deg P = 2$. En revanche si $a_2 = 0$, on aurait $\deg P$...........
On a vu deux écritures différentes d'un polynôme : développée et normalisée. Selon l'écriture retenue, on n'a pas la même information sur le degré :

Théorème 22.6 – Lien entre écriture et degré

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Avec l'écriture développée :

- Avec l'écriture normalisée :

L'écriture développée de P donne une information sur la valeur *maximale* du degré de P. L'écriture normalisée de P donne la valeur précise du degré de P.

Vocabulaire lié au degré. Soit P un polynôme non nul qui a une écriture normalisée $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

1. a_n est appelé le coefficient dominant (ou de plus haut degré) de P. On le note $\mathrm{cd}(P)$.
2. $a_n X^n$ est appelé le terme dominant (ou de plus haut degré) de P.
3. P est dit unitaire si $a_n = 1$, i.e. si P est de la forme $\quad X^n + a_{n-1}X^n + \ldots a_1 X + a_0$
4. P est dit un monôme si $a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$, i.e. si P est de la forme $\quad a_n X^n \quad$ (avec $a_n \neq 0$)

On ne peut parler de coefficient dominant (et écrire $\mathrm{cd}(P)$) que si $P \neq 0$!

1.4 Somme de polynômes et multiplication par une constante

Étant donné deux polynômes P et Q, il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que ces polynômes puissent s'écrire sous forme développée avec $N+1$ coefficients :

$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \qquad Q = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k$$

En effet, on peut toujours rajouter des coefficients nuls à P et/ou Q jusqu'à ce qu'ils soient définis avec le même nombre de coefficients.

Définition 22.7 – Opérations $+$ et $\lambda\cdot$

Soit deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$: $\quad P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \qquad Q = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k$ On définit sur $\mathbb{K}[X]$ la l.c.i. $+$ et la loi de multiplication par une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ par :

$$P + Q := \sum_{k=0}^{N} (a_k + b_k) X^k \qquad \lambda P := \sum_{k=0}^{N} (\lambda a_k) X^k$$

$P+Q$ est donc le polynôme obtenu en sommant deux à deux les coefficients de même degré des polynômes P et Q. On a bien $P+Q \in \mathbb{K}[X]$ car $\forall k \in [\![0,N]\!] \quad a_k + b_k \in \mathbb{K}$.

Ces définitions sont cohérentes avec la linéarité de la somme (symbole $\sum$) :

$$\lambda P + \mu Q \quad = \quad \lambda \sum_{k=0}^{N} a_k X^k + \mu \sum_{k=0}^{N} b_k X^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{N} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$$

Grâce à cela, on pourra calculer avec les polynômes comme on a l'habitude de calculer avec les sommes : les règles de calcul sont identiques.

Théorème 22.8

L'ensemble $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien. Son élément neutre est le polynôme nul. Le symétrique d'un polynôme P pour la loi $+$ est le polynôme $-P$.

Théorème 22.9 – Degré de λP

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \lambda \in \mathbb{K}^* \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Théorème 22.10 – Degré de $P+Q$

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

Si $\deg P = \deg Q$, il peut arriver que $\deg(P+Q) < \max(\deg P, \deg Q)$. Par exemple, si $P = X+1$ et $Q = -X$, alors $\deg(P+Q) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ tandis que

$$\max(\deg P, \deg Q) = 1 \neq -\infty$$

Démonstration.

- Si $Q = 0$, on a $\deg(P+0) = \deg P$ et $\max(\deg P, \deg 0) = \max(\deg P, -\infty) = \deg P$, donc les deux formules sont vraies. Idem si $P = 0$.

$\square$

Corollaire 22.11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \qquad \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

En particulier, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

1.5 Produit de polynômes

Le produit de deux polynômes est calqué sur le produit tel qu'on le calcule dans les réels. En introduction, on considère donc deux fonctions polynômiales $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_i x^i$$

avec $m, n \in \mathbb{N}$. Le produit fg est aussi une fonction polynômiale :

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n\right) \\ &= a_0 b_0 \ + \ (\qquad\qquad\qquad\qquad) x \ + \ (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) x^2 \\ & \quad + \ \ldots \ (\qquad\qquad\qquad\qquad) x^{m+n-1} \ + \ (\qquad\qquad) x^{m+n}\end{aligned}$$

Plus généralement, on montre que

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \qquad \text{avec } c_k = \sum_{\substack{0 \le i \le m \\ 0 \le j \le n \\ i+j=k}} a_i b_j = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

(on sous-entend dans la dernière somme que $0 \le i \le m$ et $0 \le j \le n$ car les valeurs a_i et b_j dans la somme n'ont un sens que sous ces conditions).

Définition 22.12 – Multiplication de polynômes

Soit $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ deux polynômes. On définit le polynôme produit :

(on sous-entend dans la dernière somme que $0 \le i \le m$ et $0 \le j \le n$).

Théorème 22.13 – Degré de PQ

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

Cette formule sous-entend la convention $n + (-\infty) = -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.

Démonstration.

□

La preuve ci-dessus montre en particulier $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficients dominants de P et Q :

Corollaire 22.14

Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non nuls, on a $\mathrm{cd}(PQ) = \mathrm{cd}(P) \times \mathrm{cd}(Q)$.

En particulier le produit de polynômes unitaires est un polynôme unitaire.

1.6 Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et conséquences

Théorème 22.15

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau intègre. Son élément unité est le polynôme constant $1 \in \mathbb{K}_0[X]$.

Démonstration. On vérifie facilement que $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau non trivial et commutatif. La seule propriété à vérifier est qu'il n'y a pas de diviseur de zéro dans $\mathbb{K}[X]$.

□

Corollaire 22.16

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Si $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$.
Tout polynôme non nul est régulier :

$$\forall A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \qquad AP = AQ \quad \Longrightarrow \quad P = Q$$

Théorème 22.17 – Éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. P est inversible si et seulement si P est constant non nul, i.e. $P = a_0 \in \mathbb{K}^*$. Dans ce cas, l'inverse de P est le polynôme $\frac{1}{a_0}$.

Démonstration. Sens indirect : si $P = a_0 \in \mathbb{K}^*$, alors en posant le polynôme constant $Q = \frac{1}{a_0}$, on a bien $PQ = 1$, donc P est inversible.

□

Remarque. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\quad \lambda(PQ) = P(\lambda Q) = (\lambda P)Q$
On pourra donc écrire λPQ sans ambiguité

1.7 Puissances d'un polynôme

Définition 22.18

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit le polynôme

$$P^n = \underbrace{P \times \cdots \times P}_{n \text{ fois}}$$

avec la convention $P^0 = 1$.

Théorème 22.19 – Degré de P^n

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\deg(P^n) = n \deg P$$

La formule reste vraie si $n = 0$ avec la convention $0 \times (-\infty) = 0$, mais cela n'est guère utile à retenir en pratique.

Théorème 22.20 – Formules du binômes et de $a^n - b^n$ (version polynômes)

Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Q^k P^{n-k}$$

$$P^n - Q^n = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k} = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} Q^k P^{n-1-k}$$

⚠ Pour déterminer le degré d'une somme de polynômes, il vaut mieux l'écrire sous une forme développée puis chercher le coefficient non nul de plus haut degré.

Exemple 4. Soit un entier $n \geq 1$ et $P = (X+1)^n - X^n - nX^{n-1}$. Déterminer le degré et (s'il existe) le coefficient dominant de P.

1.8 Évaluation en un point

Définition 22.21

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $z \in \mathbb{K}$. On appelle évaluation de P en z la valeur $P(z)$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

On prendra garde au fait que si $P = a_0$, i.e. P est constant, alors $P(z) = a_0$. Bien que $P = a_0$, on écrira toujours $P(z)$ et non "$a_0(z)$" à cause d'une confusion évidente et dangereuse avec le produit entre $a_0 \in \mathbb{K}$ et $z \in \mathbb{K}$.

Avec des notations évidentes, on a de plus :

$$(P+Q)(z) = P(z) + Q(z)$$
$$(\lambda P)(z) = \lambda P(z)$$
$$(PQ)(z) = P(z)Q(z)$$

Théorème 22.22

Soit $z \in \mathbb{K}$. L'application

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_z : \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K} \\ P &\mapsto P(z) \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux.

Exemple 5. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $\quad P(0) =$.............. $\quad$ et $\quad P(1) =$..............

1.9 Composition de polynômes

Notation. Jusqu'à présent, on a toujours noté un polynôme avec uniquement la lettre P, mais on peut aussi l'écrire avec $P(X)$. On peut donc écrire $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Cette notation permet de définir par exemple :

$$P(X^2) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^2)^k \qquad P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k$$

Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition 22.23

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ deux polynômes. On définit le polynôme composée $P \circ Q$ par :

$$P \circ Q = P(Q(X)) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j \right)^k$$

Exemple 6. Soit $P = X^2 - X$, $\quad Q = 2X + 1 \quad$ et $\quad R = 3$. Calculer :

$P \circ Q =$.. $\quad$ $P \circ R =$..

$Q \circ P =$.. $\quad$ $R \circ P =$..

⚠ On évitera d'écrire $P(Q)$: on ne sait pas dire s'il s'agit d'un produit ou d'une composée de P avec Q... S'il y a un risque de confusion, on écrira donc $P(Q(X))$ pour une composition, et $P(X)Q(X)$, ou plus simplement PQ, pour un produit.

Théorème 22.24 – Degré de $P \circ Q$

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. Si Q est non constant, alors $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$.
2. Si Q est constant, alors $P \circ Q$ est constant et donc $\deg(P \circ Q) \leq 0$.

2 Fonction polynômiale

Définition 22.25 – Fonction polynômiale

Soit $X \subset \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$. On dit que f est une fonction polynômiale s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \qquad f(x) = P(x)$$

Définition 22.26

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit la fonction polynômiale associée à P comme étant la fonction $f_P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$f_P : x \mapsto P(x)$$

Cette notation n'est pas officielle. En général, on note plutôt $\widetilde{P}$ la fonction f_P.

Au lycée, on dit par exemple que la fonction $x \mapsto x^2 + 2x$ est un polynôme, mais le terme correct est en fait fonction polynômiale.

Techniquement, on ne doit pas confondre f_P, qui est une fonction et donc un élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, et P qui est un polynôme et donc un élément de $\mathbb{K}[X]$. Mais en pratique, l'application $P \mapsto f_P$ est une bijection et cela ne pose pas de problème. Par abus, on peut donc dire qu'une fonction polynômiale f_P est en fait un polynôme.

Les opérations $+$, $\lambda\cdot$, $\times$ et $\circ$ pour les polynômes sont "compatibles" avec les opérations $+$, $\lambda\cdot$, $\times$ et $\circ$ entre fonctions. Cela signifie que pour tous polynômes P, Q et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

- $f_{P+Q} = f_P + f_Q$
- $f_{\lambda P} = \lambda f_P$
- $f_{PQ} = f_P f_Q$
- $f_{P \circ Q} = f_P \circ f_Q$

En particulier, l'application $P \mapsto f_P$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$.

3 Dérivation formelle dans $\mathbb{K}[X]$

3.1 Définitions et premières propriétés

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si f est la fonction définie par $f(x) = x^k$, alors

$$f'(x) = \begin{cases} kx^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Sur le même principe, on pose

$$(X^k)' = \begin{cases} kX^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Définition 22.27

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Le polynôme dérivé de P est le polynôme

On ne peut pas écrire "X^{-1}", donc en particulier on ne peut écrire $(X^k)' = kX^{k-1}$ que lorsque $k \geq 1$. C'est pourquoi la première somme de la définition commence à l'indice 1.

Sur le principe, la dérivation est en tout point similaire à celle que l'on fait dans les réels :

Exemple 7. On a $(-5X^3 + 4X^2 - 7)' =$ .... et plus généralement :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k\right)' = 0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(X^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

Bien qu'on ait le droit d'écrire $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)'$, on ne peut PAS écrire " $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)'$ ". C'est vilain, moche, inadéquat... Beurk. Si f est la fonction définie par $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 7$, on ne peut toujours pas écrire $f'(x) = (-\cancel{5x^3 + 4x^2} - 7)'$

Remarque. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fonction polynômiale f_P est dérivable, et il y a "compatibilité" entre ces notions : $(f_P)' = f_{P'}$. Mais la dérivée formelle reste définie si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors qu'on ne sait pas dériver une fonction définie sur $\mathbb{C}$. Plus exactement, c'est une dérivation qui est purement algébrique (on n'utilise pas la notion de limite). C'est pour cela que l'on parle de dérivée *formelle*.

3.2 Dérivation et opérations de $\mathbb{K}[X]$

Théorème 22.28 – Dérivation et $+, \lambda\cdot, \times, \circ$

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. Linéarité : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
2. Produit : $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$.
3. Composition : $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \times Q'$.

Exemple 8. Déterminer la dérivée formelle du polynôme $P = (2X-1)^4$.

Théorème 22.29 – Degré de P'

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $\deg P \geqslant 1$, alors $\deg P' = \deg P - 1$.
- $P' = 0$ si et seulement si P est constant (i.e. $\deg P \leq 0$).

Démonstration.

Pour la seconde assertion, le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, on raisonne par contraposée : il suffit de montrer que si P est non constant, alors $P' \neq 0$. Or, si P est non constant, on a $\deg P \geq 1$, et donc par la première assertion on a $\deg P' \geq 1 - 1 = 0 \neq -\infty$. Ainsi, $P' \neq 0$. $\square$

3.3 Dérivée k-ième

Définition 22.30

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit récursivement le polynôme dérivé d'ordre k de P, noté $P^{(k)}$ en posant :

- $P^{(0)} = P$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$

Exemple 9 (Important !)**.** Soit $k,n\in\mathbb{N}$.

$$(X^n)^{(k)} =$$

En particulier $(X^n)^{(n)} =$ ....
On peut généraliser les propriétés de la dérivée formelle aux dérivées successives :

Théorème 22.31

Soit $P,Q\in\mathbb{K}[X]$, et $n\in\mathbb{N}$.

- Linéarité : pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, on a $(\lambda P+\mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)}+\mu Q^{(n)}$
- Formule de Leibniz : $(P\times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k)}$

Théorème 22.32 – Degré de $P^{(n)}$

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et $n\in\mathbb{N}$.

- Si $\deg P\geqslant n$, alors $\deg(P^{(n)}) = \deg P - n$.
- $P^{(n)} = 0$ si et seulement si $\deg P\leq n-1$.

Exemple 10. Soit $\alpha\in\mathbb{K}$ et $P\in\mathbb{K}[X]$. Déterminer la dérivée k-ième du polynôme $Q(X) = P(X+\alpha)$ en fonction de celle de P.

3.4 Formule de Taylor

Théorème 22.33 – Formule de Taylor

Soit $n\in\mathbb{N}$ et P un polynôme de degré au plus n.

Si $\deg P < n$, alors $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $k\geq \deg P+1$: les termes correspondants de la somme sont alors nuls.

Démonstration. Soit $\alpha\in\mathbb{K}$. On fait d'abord la preuve dans le cas où P est un monôme :

•

•

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i (X^i)^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k!} a_i (X^i)^{(k)}(\alpha)(X-\alpha)^k \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(X^i)^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k \right)\end{aligned}$$

Or, on a prouvé que la formule de Taylor est valide pour les monômes, donc pour tout $i \in [\![0,n]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(X^i)^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = X^i$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = P(X)$$

□

Remarque. En particulier, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors par identification, $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Corollaire 22.34

Si deux polynômes P et Q ont la même fonction polynômiale ($f_P = f_Q$), alors $P = Q$. En particulier, l'application $P \mapsto f_P$ est bijective de $\mathbb{K}[X]$ sur l'ensemble des fonctions polynomiales.

Démonstration. On admettra cette propriété pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $f_P = f_Q$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$P^{(k)}(0) = (f_P)^{(k)}(0) = (f_Q)^{(k)}(0) = Q^{(k)}(0)$$

Ainsi, étant donné $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \deg P$ et $n \geq \deg Q$, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k = Q$$

Ceci prouve que l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans l'ensemble des fonctions polynômiales définie par $P \mapsto f_P$ est injective. Elle est par ailleurs surjective par définition des fonctions polynômiales. Elle est donc bijective. □

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour déterminer le degré d'un polynôme on peut :

- Mettre le polynôme sous la forme dite normalisée, ce qui revient à chercher son coefficient non nul de plus haut degré.
- Appliquer les formules du degré d'un produit, d'une puissance, d'une composition de deux polynômes (dans le cas d'une somme, il vaut mieux essayer d'abord la première méthode).

Méthode

Pour trouver tous les polynômes qui vérifient une équation donnée, il est souvent utile de raisonner sur le degré et/ou sur le coefficient dominant.

Méthode

Quand on dispose d'informations sur toutes les dérivées d'un polynôme P en un point α (i.e. $P(\alpha)$, $P'(\alpha)$, $P''(\alpha)$, etc.), la formule de Taylor peut être d'une aide précieuse.